UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

M1 Sciences de l'univers et technologies spatiales

année 2019/2020

EXAMEN TERMINAL de compléments de mécanique quantique EMSUA1B1

Session du 11 juin 2020

Durée : 1h30 - Tous documents interdits

Questions de cours :

Rappeler les conditions de normalisation et d'orthogonalité en notation de Dirac.
Démontrer le lien entre moment dipolaire magnétique et moment cinétique orbital.
Donner le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique en fonction des opérateurs a et a+ dont on précisera le rôle.

Exercice ATOME D'HYDROGENE PLACE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE

Les fonctions propres du Hamiltonien $H_0 = \vec{P}^2/2m + V(r)$ pour un atome d'hydrogène non-perturbé sont en coordonnées sphériques $\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$. $\vec{P}$ représente le vecteur impulsion, *m* la masse de l'électron et *V(r)* l'énergie potentielle électrostatique. Les valeurs propres associées à ces fonctions propres sont données par $E_{nlm}^{(0)} = -E_I/n^2$, avec E_I = 13,6 eV.

On place cet atome d'hydrogène dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, parallèle à l'axe *Oz* et de faible intensité. L'électron qui gravite autour du proton se trouve alors placé dans un potentiel scalaire $V(r) = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r$ ainsi que dans un potentiel vecteur $\vec{A} = 1/2\,\vec{B} \wedge \vec{r}$. La présence de ce dernier fait que $\vec{P}$ est remplacé par $\vec{u} = \vec{P} - e\vec{A}$ dans le Hamiltonien. Dans tout le problème, on néglige le spin de l'électron.

1. Ecrire le Hamiltonien *H* du système en supposant $\vec{B}$ de suffisamment faible intensité pour pouvoir négliger les termes quadratiques devant les termes en *B*. On rappelle la relation vectorielle $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a})$. On admettra que $\vec{P}$ et $\vec{A}$ commutent.

2. Que représente le terme $-\mu_B/\hbar\,\vec{L}.\vec{B}$? On rappelle qu'on définit le magnéton de Bohr par $\mu_B = e\hbar/2m$.

3. Montrer que les Ψ_{nlm} sont fonctions propres de *H*.

4. Calculer les valeurs propres correspondantes E_{nlm} en fonction de $E_{nlm}^{(0)}$ et de $\omega = -\mu_B\,B/\hbar$, pulsation de Larmor.

5. On considère l'état fondamental $\left|\Psi_{100}\right\rangle$, ainsi que les trois sous-niveaux $\left|\Psi_{21m}\right\rangle$ du premier état excité. On posera $\hbar\Omega = E_{21m}^{(0)} - E_{100}^{(0)}$ et on prendra désormais l'origine des énergies en $E_{100}^{(0)}$. On suppose qu'à *t = 0* le système est dans l'état:

$$\left|\phi_m(t=0)\right\rangle = \cos\alpha\left|\Psi_{100}\right\rangle + \sin\alpha\left|\Psi_{21m}\right\rangle.$$

Quel est l'état $\left|\phi_m(t)\right\rangle$ du système à l'instant *t* ?

6. Après avoir exprimé les coordonnées cartésiennes x, y et z en fonction de r, θ et φ, les réexprimer en fonction des harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$.

Rappel: les valeurs des harmoniques utiles au problème sont: $Y_0^0(\theta,\varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$, $Y_1^{\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{3/8\pi}\sin\theta\exp(\pm i\varphi)$ et $Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{3/4\pi}\cos\theta$. Elles sont liées entre elles - de manière générale- par les conditions de normalisation et d'orthogonalité, soient $\int_{sphère} Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'} \sin\theta \, d\theta d\varphi = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$.